KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

RASPODJELA NEPREKIDNIH PROMJENLJIVIH

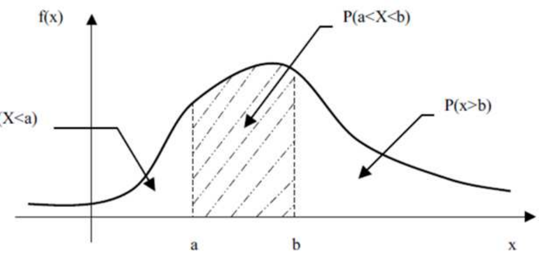
1. Normalna (Gausova) raspodjela

P6

Neprekidna slučajna promjenljiva i gustina raspodjele vjerovatnoća

- Funkcija X koja svakom elementarnom ishodu (događaju) jednog eksperimenta , pridružuje neki realan broj naziva se **slučajna (aleatorna) promjenljiva X.**
- **Neprekidna (kontinualna)** slučajna promjenljiva može da uzme sa pozitivnom vjerovatnoćom proizvoljnu brojnu vrijednost na određenom intervalu. Vjerovatnoća da neprekidna slučajna promjenljiva poprimi pojedinu vrijednost unutar intervala je nula.

  *Slučajna promenjiva X je **neprekidnog tipa (neprekidna slučajna promenjiva)** ako je skup svih vrijednosti koje ona uzima jedan interval na realnoj pravoj (ovaj interval može biti i cio skup R).*
- **Najznačajnije raspodjele vjerovatnoća neprekidne slučajne promjenljive:**
  – normalna raspodjela
  – eksponencijalna raspodjela
  – χ^2 (hi-kvadrat) raspodjela
  – Studentova
- za neprekidne slučajne promjenljive neophodno je definisati gustinu njene raspodjele, odnosno funkciju f(x)



Slika 3.2.2. Funkcija gustine raspodele

Normalna (Gausova) raspodjela

- Normalna ili Gausova raspodela ima centralno mjesto u teoriji vjerovatnoće i matematičke statistike (Karl Fridrih Gaus 1777-1855):
  - veliki broj pojava u prirodi (slučajnih promenljivih) se „raspoređuje“ po normalnoj raspodeli (visina ljudi, srednja greška pri mjerenju nekim instrumentom,koeficijent inteligencije...)
  - veliki broj slučajnih promenljivih može se aproksimirati normalnom raspodjelom
  - upotrebom relativno jednostavih transformacija slučajne promjenljive mogu se dobiti slučajne promjenljive koje imaju normalnu raspodjelu
  - slučajne promjenljive koje služe za verifikaciju statistićkih testova imaju normalnu raspodjelu

- Za slučajnu promenljivu X neprekidnog tipa kažemo da ima normalnu raspodjelu sa parametrima μ, i σ, μϵR, σ>0, u oznaci X~ N(μ,σ), ako je njena gustina raspodjele vjerovatnoća:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

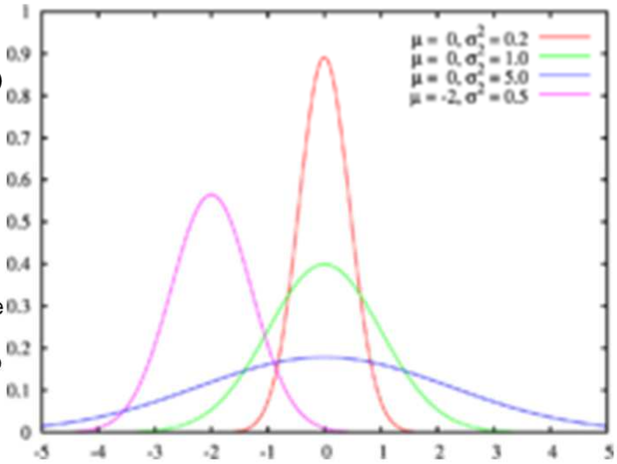
- Funkcija raspodjele vjerovatnoće je:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dt$$

Osobine normalne raspodjele

Zavisno od vrijednosti parametara μ i σ grafici funkcije f(x) (krive gustine) su različiti, ali imaju sljedeća zajednička svojstva:

1. p(μ- x)=p(μ +x) : sve krive gustine simetrične su u odnosu na pravu x=μ.
2. Medijana je Me=μ
3. Moda (tačka maksimuma) je tačka M(μ, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$)
4. lijevo i desno od tačke maksimuma kriva gustine simetrično opada do nule, tj. $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$
5. promjena vrijednosti $\boldsymbol{\mu}$ dovodi do translacije krive gustine duž X-ose
6. promjena vrijednosti $\boldsymbol{\sigma}$ dovodi do promjene spljoštenosti (rasturanja oko tačke x= μ) krive gustine. Ukoliko je veće, maksimalna vrijednost krive je manja, ali je rasturanje oko x= μ veće
7. sve krive gustine imaju oblik osnog presjeka zvona, odnosno u okolini tačke maksimuma one su konveksne, a lijevo od tačke $\boldsymbol{x=\mu-\sigma}$ i desno od tačke $\boldsymbol{x=\mu+\sigma}$ postaju konkavne



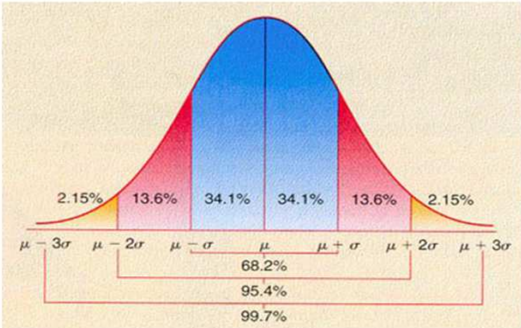
Osobine normalne raspodjele

- U intervalu od ±1 σ u odnosu na aritmetičku sredinu nalazi se 68,27% svih vrednosti. Dakle u ovom intervalu se nalazi:
  - $P(x -1\,\sigma <x> x +1\,\sigma)=0{,}6827=68{,}27\%$
- U intervalu od ±2 σ u odnosu na aritmetičku sredinu nalazi se 95,47% svih vrednosti. Dakle u ovom intervalu se nalazi:
  - $P(x -2\,\sigma <x> x +2\,\sigma)=0{,}9546=95{,}46\%$
- U intervalu od ±3 σ u odnosu na aritmetičku sredinu nalazi se 99,73% svih vrednosti. Dakle u ovom intervalu se nalazi:
  - $P(x -3\,\sigma <x> x +3\,\sigma)=0{,}9973=99{,}73\%$

a. $P\{m-\sigma<X<m+\sigma\}= 0{,}682$

b. $P\{m-2\sigma<X<m+2\sigma\}= 0{,}954$

c. $P\{m-3\sigma<X<m+3\sigma\}= 0{,}997.$



Parametri normalne raspodjele

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

- matematičko očekivanje:
  $$M(X) = \mu$$
- moda i medijana: $Mo = Me = \mu$
- disperzija (varijansa):
  $$D(X) = \sigma^2$$
- Standardno odstupanje
  $$\sigma(X) = \sigma$$

Standardizovana slučajna promjenljiva

- Ako umjestio slučajne promenljive X koja ima normalnu raspodjelu: X~ N(μ, σ), uvedemo standardizovanu slučajnu promjenljivu:

  $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$, može se dokazati da ova promjenljiva ima normalnu raspodjelu T ~N(0,1),
- funkcija gustine vjerovatnoće standardizovane promjenljive je:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad -\infty < t < \infty$$

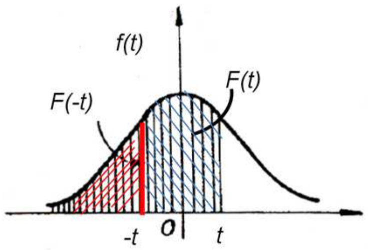
- Funkcija raspodjele vjerovatnoće standardizovane slučajne promjenljive T sa normalnom raspodjelom

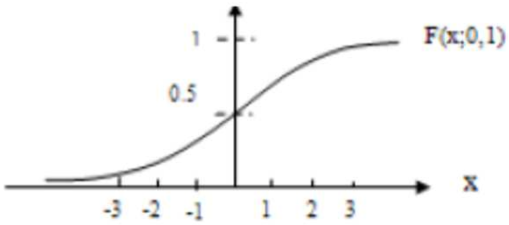
$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \text{pri čemu važi:}$$

$$F(-\infty < T < +\infty) = F(-\infty < T < 0) + F(0 < T < +\infty) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$$

$$F(-t) = 1 - F(t)$$

- Vrijednosti F(t) date su u tablicama samo za pozitivne realne brojeve.





Dokaz:
Matematičko očekivanje promjenljive T, odnosno M(T)=0, jer:

$$M(T) = M\left(\frac{X - M(X)}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta} M[X - M(X)] = \frac{1}{\delta}[M(X) - M(X)] = \frac{1}{\delta} 0 = 0$$

Disperzija D(T) jednaka je 1, jer:

$$D(T) = D\left(\frac{X - M(X)}{\delta}\right) = \frac{D[X - M(X)]}{\delta^2} = \frac{D(X) + D[M(X)]}{\delta^2} = \frac{\delta^2 + 0}{\delta^2} = 1$$

Vjerovatnoća da slučajna promjenljiva uzme vrijednost iz intervala

- Vjerovatnoća da slučajna promenljiva X~ N(μ, σ), uzme vrijednost iz intervala (a,b) se može sračunati iz određenog integrala:

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx$$

- Primjenom standardizovane promjenljive $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ i njene funkcije raspodjele vjerovatnoće F(t) gornji se izraz može transformisati:

$$P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P(t_1 < T < t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

- odnosno:

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P(t_1 < T < t_2) =$$
$$P(-\infty < T < t_2) - P(-\infty < T < t_1) = P(T < t_2) - P(T < t_1)$$

- *NAPOMENA:Binomna raspodjela X~ B(n,p), se može dosta dobro aproksimirati normalnom raspodjelom, u slučaju kada je n veliko, tj. np>10, tj. važi*

$$P\left(a \le \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \qquad n \to \infty$$

Iznalaženje intervala na kome slučajna promjenljiva ima unaprijed zadatu vjerovatnoću

- Vjerovatnoća da slučajna promenljiva X~ N(μ,σ), uzme vrijednost iz intervala (a,b) se može sračunati iz određenog integrala i uz uvođenje smjene $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx = P(T < t_2) - P(T < t_1)$$

- zadatak određivanja intervala u kome slučajna promjenljiva ***X~ N(μ,σ),*** ima vjerovatnoću ***p*** može se rješavati samo ako se traži interval simetričan u odnosu na matematičko očekivanje **μ** odnosno ako se ovako definiše:

$$P(\mu - a < X < \mu + a) = p$$

- Primjenom standardizovane promjenljive $T = \frac{X-\mu}{\sigma}$ i njene funkcije raspodjele vjerovatnoće F(t) gornji se izraz može transformisati:

$$P\left(\frac{\mu - a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{\mu + a - \mu}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{a}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{a}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{a}{\sigma} < T < \frac{a}{\sigma}\right) = p$$

odnosno:

$$P\left(T < \frac{a}{\sigma}\right) - P\left(T < -\frac{a}{\sigma}\right) = P\left(T < \frac{a}{\sigma}\right) - \left(1 - P\left(T < \frac{a}{\sigma}\right)\right) = 2 * P\left(T < \frac{a}{\sigma}\right) - 1$$

- i za ovaj zadatak se koriste tabele standardizovane promjenljive sa N(0,1)

Tabela vjerovatnoća standardizovane slučajne promjenljive za proračun vjerovatnoća za interval

Normalna raspodela :od – beskonacno do x

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	8944	.8962	.8980	.8997	9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Primjer: naći vjerovatnoću da slučajna promjenljiva X~ N(8,4)

1. uzme vrijednost manju od 5.
2. uzme vrijednosti između 10 i 15

Rješenje: uvedimo smjenu

$$T = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-8}{4}$$

1. uzme vrijednost manju od 5

$$P(X<5) = P\left(\frac{X-8}{4} < \frac{5-8}{4}\right) = P(T < -0{,}75) = 1 - P(T < 0{,}75)$$

iz tablica se pročita :

$$P(T < 0{,}75) = 0{,}7734$$

konacno:

$$P(X < 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$$

2. uzme vrijednosti između 10 i 15

$$P(10 < X < 15) = P\left(\frac{10-8}{4} < \frac{X-8}{4} < \frac{15-8}{4}\right)$$
$$= P(0{,}5 < T < 1{,}75) = P(T < 1{,}75) - P(T < 0{,}5)$$
$$= 0{,}9599 - 0{,}6915 = 0{,}2684$$

Tabela vjerovatnoća standardizovane slučajne korišćenje u svrhu određivanja intervala

Normalna raspodela :od – beskonacno do x

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Primjer: naći interval u kojem slučajna promjenljiva X~ N(16,4) ima vjerovatnoću 0,95.

Rješenje: uvedimo smjenu

$$T=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-16}{4}$$

$$P\left(-\frac{a}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{a}{\sigma}\right)=P\left(-\frac{a}{\sigma}<T<\frac{a}{\sigma}\right)=0{,}95$$

$$P\left(T<\frac{a}{\sigma}\right)-P\left(T<-\frac{a}{\sigma}\right)=0{,}95$$

$$P\left(T<\frac{a}{\sigma}\right)-\left[1-P\left(T<\frac{a}{\sigma}\right)\right]=0{,}95$$

$$2*P\left(T<\frac{a}{\sigma}\right)-1=0{,}95$$

$$P\left(T<\frac{a}{\sigma}\right)=\frac{1+0{,}95}{2}=0{,}975$$

iz tablica se pročita :

$$za\ p=0{,}975 \qquad Z=\frac{a}{4}=1{,}96$$

odavde se sračuna

$$a=1{,}96\cdot 4=7{,}84$$

dakle traženi interval za X je:

$$(\mu-a,\mu+a)=(16-7{,}84;16+7{,}84)=(8{,}16;23{,}84)$$

može se provjeriti tako da se za ovaj interval iz tablica procita vjerovatnoca

Literatura

- Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pergled, Beo
- Vukadinović, S.: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Privredni pergled, Beograd, 1983
- Čuljak, V: Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011, https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/004/082/original/Skripta_Vera_%C4%8Culjak.pdf?1413283708
- Prof. dr Dušan Joksimović: POSLOVNA STATISTIKA, Megatrend univerzitet primenjenih nauka, Beograd, 2006.
- Pivac, S.: Statističke metode (predavanja, diplomski studij, kolegij "Statističke metode") e-nastavni materijal, Split, 2010.
- http://www.ef.uns.ac.rs/Download/metodologija_nir/20_uzorkovanje.pdf
- http://www.medfak.ni.ac.rs/PREDAVANJA/2.%20STOMATOLOGIJA/STATISTIKA/6.%20predavanje.pdf